

Ein Blick in den Zustandsraum

Von Lothar Dilcher

Bronstein sagt, Im Zustands- oder Phasenraum befinde sich der n-dimensionale Vektor $x(t)$ mit den Zustands- oder Phasenkoordinaten $x_1 \dots x_n$, die den Zustand eines Objekts beschreiben.

Die Darstellung, bei der die Variablen Abszisse ist und die Ableitung Ordinate, wird häufig bei der Lösung von Differentialgleichungen 1. Ordnung (Isoklinen Verfahren) als Zustandsdarstellung bezeichnet. Vielleicht stammt daher der Name.

Seit 1960 nahm - von USA kommend - die Behandlung dynamischer Probleme im Zustandsraum mit passenden Optima-Kriterien verknüpft in der Literatur immer mehr Platz ein. Das gemeinsame Kennzeichen war immer der Schriftzug $\dot{x} = Ax + Bu$. Allein wegen der Häufung kamen Zweifel auf, ob es sich um praktisch wertvolle Methoden handelte oder um eine mathematische Mode.

Immer schon wurde die maschinelle Integration von Differentialgleichungen aus der Integration einzelner in Reihe liegender Integrale zusammengesetzt. Anfangs – im 2. Weltkrieg und in der Nachkriegszeit- wurden Reibradintegratoren dazu verwendet, dann waren es überwiegend elektronische Analogrechner und jetzt sind es numerische Computer.

Die ersten Aufgaben der maschinellen Berechnung waren vermutlich die Flugbahnen militärischer Geschosse. Später wurde ein wachsender Simulationsbedarf dynamischer Systeme mit der jeweils aktuellen Rechenmaschinen-Technik bedient. Besonders in der Regelungstechnik benutzte man gern die Maschine, um Regelstrecken zu simulieren und zugehörige Regeleinrichtungen zu entwerfen.

Die DGL wird immer nach der höchsten Ableitung aufgelöst, die dann so oft integriert wird wie ihre Ordnung ist. Hierfür wird die DGL n-ter Ordnung in n DGLn. erster Ordnung implizit oder explizit zerlegt, um immer einfache Integrale zu erhalten.

Die Methode funktionierte selbst im Frühzustand der Technik problemlos, namentlich bei linearen DGLn. mit konstanten Koeffizienten und bei einer einfachen Anregungsfunktion. Schwieriger wurde es bei Nichtlinearitäten und mit einer Stör- bzw. Anregungsfunktion, die von ihren höheren zeitlichen Ableitungen begleitet wird. Die Nichtlinearitäten konnten mit dem Digitalrechner gut bewältigt werden, während die Erweiterung der Anregungsfunktion um ihre Ableitungen Systemveränderungen erforderte. Das Differenzieren der Anregungsfunktion, um die Ableitungen zu erhalten, ist eventuell schwierig und kann zu Fehlern führen. Man versucht auch hier wie bei den Systemgrößen das Problem durch Integration zu lösen.

Für eine DGL mit den Größen $y(t)$, t und $u(t)$ ergeben sich folgende Varianten:

1). u(t) ohne Ableitungen (Die Übertragungsfunktion hat keine Nullstellen):

$$a_4 y^{(4)} + a_3 y^{(3)} + a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_0 u(t) \quad \text{mit} \quad \frac{d^4 y}{dt^4} = y^{(4)}$$

$$y^{(4)} = -\frac{a_3}{a_4} y^{(3)} - \frac{a_2}{a_4} \ddot{y} - \frac{a_1}{a_4} \dot{y} - \frac{a_0}{a_4} y + \frac{b_0}{a_4} u(t)$$

$$\ddot{y} = \int y^{(4)} dt$$

$$\dot{y} = \int \ddot{y} dt$$

$$y = \int \dot{y} dt$$

$$y = \int \dot{y} dt$$

Das kann man auf einen Analogrechner stecken oder als eine Programmschleife im PC verwenden. Man erhält also das gewünschte $y(t)$ und auch seine oft begehrten zeitlichen Ableitungen.

2). Erweiterung von u(t) (Die Übertragungsfunktion hat eine oder mehrere Nullstellen):

$u(t)$ wird zu:

$$u(t) = b_3 \ddot{u} + b_2 \dot{u} + b_1 \dot{u} + b_0 u \quad \text{so wird :}$$

$$a_4 y^{(4)} + a_3 y^{(3)} + a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_3 \ddot{u} + b_2 \dot{u} + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

Man könnte nun die Gleichung wie oben nach der höchsten Ableitung von $y(t)$ auflösen. Dann käme allerdings das Problem auf, die höheren Ableitungen von $u(t)$ explizit darzustellen. Dies könnte zu größeren Schwierigkeiten führen (s. oben).

Zur Vermeidung findet man in der Literatur hauptsächlich zwei Lösungswege:

21). Einführen einer neuen Veränderlichen x an Stelle von y und $u(t)=b_0 u$ (keine Ableitungen):

$$a_4 x^{(4)} + a_3 x^{(3)} + a_2 \ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = b_0 u$$

Um die Umformungen plausibler zu machen, werden beide Funktionen als Übertragungsfunktionen dargestellt ($p=j\omega$):

$$\frac{y(p)}{u(p)} = \frac{b_3 p^3 + b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}$$

$$\frac{x(p)}{u(p)} = \frac{1}{a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}$$

daraus folgt

$$y(p) = (b_3 p^3 + b_2 p^2 + b_1 p + b_0) \cdot x(p)$$

Es ergibt sich im Zeitbereich:

$$y(t) = b_3 \ddot{x} + b_2 \dot{x} + b_1 \dot{x} + b_0 x$$

Die Ermittlung von $y(t)$ geht analog zu obigem Schema:

$$x^{(4)} = -\frac{a_3}{a_4} \ddot{x} - \frac{a_2}{a_4} \ddot{x} - \frac{a_1}{a_4} \dot{x} - \frac{a_0}{a_4} x + \frac{1}{a_4} u(t)$$

$$\ddot{x} = \int x^{(4)} dt$$

$$\dot{x} = \int \ddot{x} dt$$

$$x = \int \dot{x} dt$$

$$y(t) = b_3 \ddot{x} + b_2 \ddot{x} + b_1 \dot{x} + b_0 x$$

Die Größe x und ihre Ableitungen werden meist „Zustandsgrößen“ genannt. Sie ersetzen in der Rechnung die Größe y und ihre Ableitungen. Eine physikalische Bedeutung der Zustandsgrößen muss nicht gegeben sein. Insofern könnte der Name irreführen.

Man kann als nachteilig ansehen, dass die Ableitungen von y nicht mehr zur Verfügung stehen, besonders im Hinblick auf Anwendungen in der Regelungstechnik.

In Matrix-Schreibweise ergibt sich hieraus die sog. Regelungsnormalform.

Mit der Umbenennung

$$x = x_1$$

$$\dot{x} = \dot{x}_1 = x_2$$

$$\ddot{x} = \dot{x}_2 = x_3$$

$$\ddot{x} = \dot{x}_3 = x_4$$

Kann das System in Matrixform geschrieben werden.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_0/a_4 & a_1/a_4 & a_2/a_4 & a_3/a_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + 1/a_4 \cdot u(t)$$

$$y = (b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad b_3) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Meist wird das Problem in dieser ansprechenden Form präsentiert.

Option:

Wenn die Erweiterung von $u(t)$ auf die erste Ableitung begrenzt ist, ist es u. U. möglich bei der Notation von 1) zu bleiben, indem man die Ableitung von $du(t)/dt$ definiert und $u(t)$ durch Integration erhält (Die Übertragungsfunktion hat eine Nullstelle). Es ergibt sich

$$u(t) = \dot{u} + \int \dot{u} dt$$

Man erspart sich hiermit den Umgang mit den Zustandsgrößen x . Es bleiben die ursprünglichen Größen y erhalten.

22). Zusammenfassung gleicher Ableitungen von y und u (Gleichung wie 2)

$$\begin{aligned} a_4 y^{(4)} + a_3 y^{(3)} + a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y &= b_3 \ddot{u} + b_2 \dot{u} + b_1 \dot{u} + b_0 u \\ y^{(4)} &= \frac{1}{a_4} (-a_3 y^{(3)} + b_3 \ddot{u} - a_2 \ddot{y} + b_2 \dot{u} - a_1 \dot{y} + b_1 \dot{u} - a_0 y + b_0 u) \\ y &= \frac{1}{a_4} \left(\int (-a_3 y + b_3 u) dt + \int \int (-a_2 y + b_2 u) dt^2 + \int \int \int (-a_1 y + b_1 u) dt^3 + \right. \\ &\quad \left. \int \int \int \int (-a_0 y + b_0 u) dt^4 \right) \end{aligned}$$

Die Terme gleicher Ableitung werden zusammengefasst und mit einem indizierten x bezeichnet:

$$\begin{aligned} x_0 &= b_0 u - a_0 y \\ x_1 &= \int x_0 dt + b_1 u - a_1 y \\ x_2 &= \int x_1 dt + b_2 u - a_2 y \\ x_3 &= \int x_2 dt + b_3 u - a_3 y \\ y &= \frac{1}{a_4} \int x_3 dt \end{aligned}$$

Alternative:

Die Ableitung mit Hilfe der Übertragungsfunktionen (gibt bessere Übersicht):

$$\begin{aligned} (a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0) y(p) &= (b_3 p^3 + b_2 p^2 + b_1 p + b_0) u(p) \\ y(p) &= \frac{1}{a_4} \left(\frac{1}{p} (b_3 u - a_3 y) + \frac{1}{p^2} (b_2 u - a_2 y) + \frac{1}{p^3} (b_1 u - a_1 y) + \frac{1}{p^4} (b_0 u - a_0 y) \right) \end{aligned}$$

Neue Variablendefinition.

$$x_0 = b_0 u - a_0 y$$

$$x_1 = \frac{1}{p} x_0 + b_1 u - a_1 y$$

$$x_2 = \frac{1}{p} x_1 + b_2 u - a_2 y$$

$$x_3 = \frac{1}{p} x_2 + b_3 u - a_3 y$$

$$y = \frac{1}{a_4} \frac{1}{p} x_3$$

Siehe auch oben im Zeitbereich

Diese Zusammenhänge - in Matrix-Schreibweise dargestellt – werden meist als Beobachternormalform bezeichnet.

Das Ergebnis für y ist bei jeder Version gleich.

Beispiel:

Aufbaufederung eines Kfz –Berechnung eines Ein-Rad-Modells

Vergleich der Ergebnisse mit und ohne Zustandsgrößen x:

1) Berechnung mit 1. Ableitung von ue

s.a. Pkt 2.1) Option:

y – Vertikalkoordinate

vy – 1. Zeitl. Ableitung von y

ay – 2. Zeitl. Ableitung von y

ue – Anregung

ve – 1. Zeitl. Ableitung von ue

m – Aufbaumasse

d – Dämpfung

dt – Zeitinkrement

2) Berechnung mit Einführung von Zustandsgrößen

xz – Zustandsgröße

vxz – 1. Zeitl. Ableitung von xz

axz – 2. Zeitl. Ableitung von xz

Computerprogramm zur Berechnung von 1) und 2):

Private Sub form_load()

m = 250

d = 5000

c = 15000

```

dt = 0.0001

merker01:

t = t + dt

If t > 0.1 Then ve = 10

If t > 0.11 Then ve = 0

ue = ue + ve * dt

ay = (1 / m) * (c * (ue - y) + d * (ve - vy))

vy = vy + ay * dt

y = y + vy * dt

PSet (1000 + 10000 * t, 7000 - 10000 * y)

PSet (1000 + 10000 * t, 3000 - 10000 * ue)

PSet (1000 + 10000 * t, 5000 - 100 * ve)

PSet (1000 + 10000 * t, 9000 - 5 * ay)

PSet (1000 + 10000 * t, 11000 - 500 * vy)

If t < 1 Then GoTo merker01


ue = 0

t = 0

y = 0

merker03:

t = t + dt

If t > 0.1 Then ue = 0.1

axz = (1 / m) * (c * (ue - xz) - d * vxz)

vxz = vxz + axz * dt

xz = xz + vxz * dt

y = xz + d / c * vxz

PSet (1000 + 10000 * t, 7000 - 10000 * y)

PSet (1000 + 10000 * t, 3000 - 10000 * ue)

```

```
PSet (1000 + 10000 * t, 5000 - 10000 * xz)
```

```
PSet (1000 + 10000 * t, 9000 - 100 * axz)
```

```
PSet (1000 + 10000 * t, 11000 - 5000 * vxz)
```

```
If t < 1 Then GoTo merker03
```

```
End Sub
```

Ein Vergleich der Ergebnisse zeigt:

Die ue sind annähernd gleich,

die y ebenfalls.

Die Zustandsgrößen **x** haben keine ersichtliche Relation zu den physikalischen Größen **y** des Systems

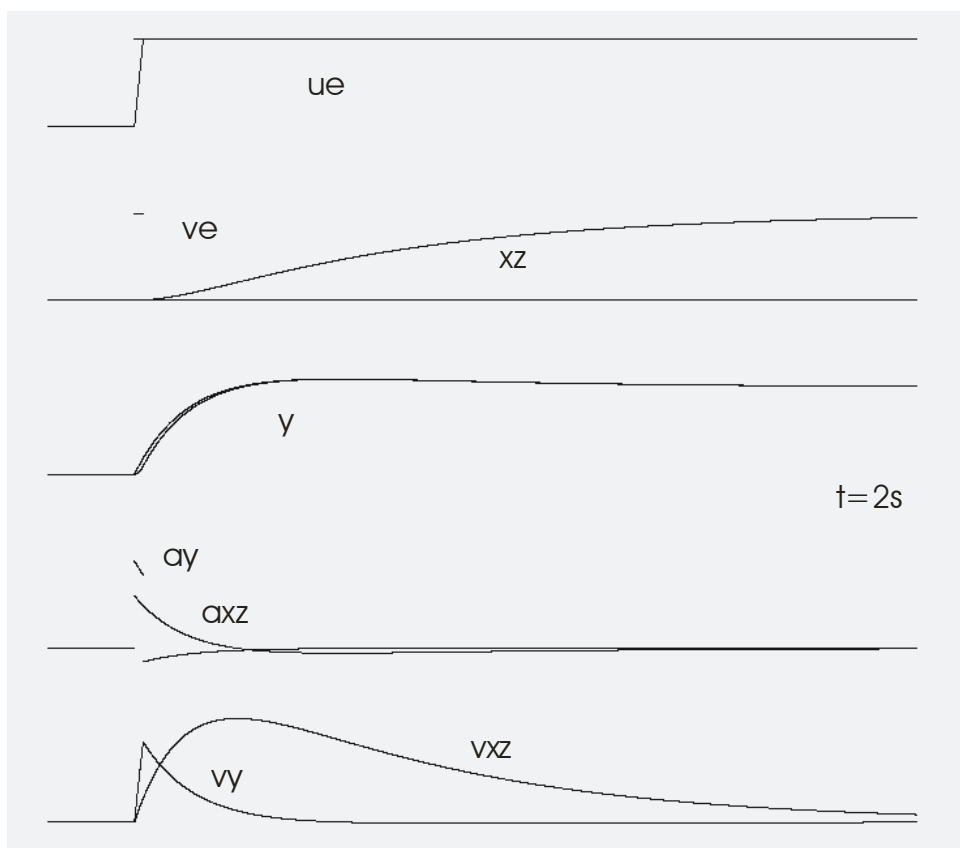


Abbildung der Übergangsfunktionen nach Sprunganregung.

Schlussfolgerung:

Die Rechnung mit den Zustandsgrößen **x** funktioniert. Die Größe **y** ist für beide Rechenmethoden gleich. Es gehen jedoch bei der Modellbildung mit den Zustandsgrößen **x** die Ableitungen der Ausgangsgröße **y** (Regelgröße) verloren. Ein Bezug der Zustandsgrößen zur physikalischen Realität ist

nicht unmittelbar ersichtlich. Ihre Eignung als Bestandteil einer Regelung müsste sich erst erweisen. Die Anschauung leidet ohne die Verwendung der originalen Ableitungen.

Wenn nur die Eingangsgröße $u(t)$ (Anregung,) und ihre 1. Ableitung der zu berücksichtigen sind, empfiehlt es sich gegebenenfalls die 1. Ableitung zu definieren und zu integrieren. Die Eingangsgröße ist dann die Summe von der 1. Ableitung und ihrem Integral. So bleiben Anschauung und Physik erhalten (s. Option).

Die Messung von Zustandsgrößen x scheint nicht ohne weiteres möglich. Die Zustandsgrößen x sind also als Rechengrößen zu sehen, die einem Modell entnommen werden können.

Die Benutzung der Zustandsgrößen x ist bei der maschinellen Behandlung von entsprechenden Differentialgleichungen notwendig, wenn die zugehörige Übertragungsfunktion Nullstellen hat. Eine Verbindung zu Pontrjagins Optimaltheorie ist nicht direkt erkennbar auch wenn als Optimal-Kriterium die Regelabweichung und die Stellgliedbewegung (beide im Quadrat) hinzugezogen werden. Vorteile bei der Entwurf und Berechnung von Systemen mit Mehrfacheingängen und Mehrfachaushängen gegenüber anderen Methoden sind ebenfalls nicht deutlich.